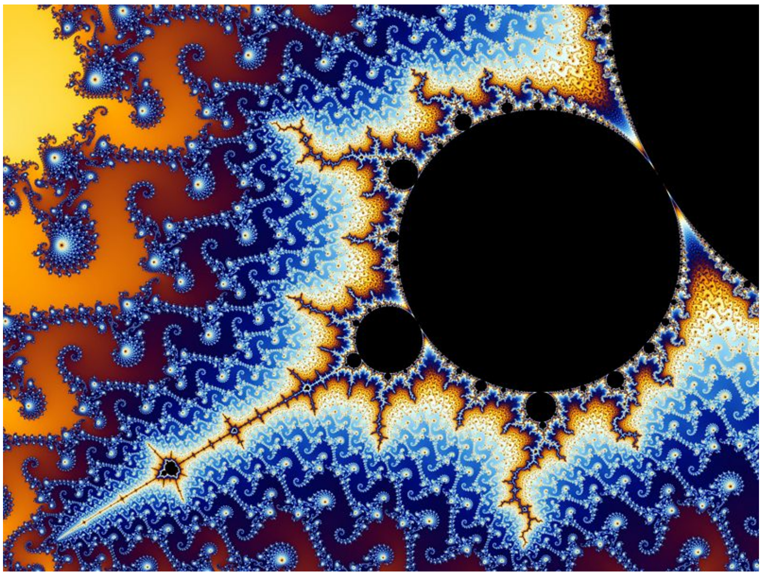
Επεξεργασία Στοχαστικού Σήματος
Αλυσίδες Markov και Fractals

Ισάκογλου Χριστίνα - AEM: 2056

11 Ιουνίου 2013



Λέξεις-Κλειδιά

Αλυσίδες markov - διαδικασίες markov - ιδιότητα markov - φράκταλ γεωμετρία

Υπόβαθρο

Οι διαδικασίες Markov(Markov process) αντιπροσωπεύουν την απλούστερη γενίκευση των ανεξάρτητων διαδικασιών όπου η έκβαση του πειράματος κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την αμέσως προηγούμενη έκβαση και από καμία πριν από αυτή. Συνεπώς σε μία διαδικαδία Markov εφόσον το παρόν είναι καθορισμένο, το παρελθόν δεν έχει καμία επίδραση στο μέλλον. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται ιδιότητα Markov(Markov property), και είναι και αυτή που καθιστά τις αναφερόμενες διαδιακασίες διαφορετικές από τις υπόλοιπες στοχαστικές (ο όρος memoryless είναι αυτός που τις χαρακτηρίζει).

Η αλυσίδα Markov (Markov chain) είναι μία ειδική διαδικασία Markov, στην ουσία η διακριτή της μορφή(discrete time/discrete valued - DTDV [1]), όπου το σύστημα μπορεί να καταλαμβάνει ένα πεπερασμένο ή ένα μετρήσιμα άπειρο πλήθος καταστάσεων $e_1, e_2, \ldots, e_j, \ldots$,έτσι ώστε η μελλοντική εξέλιξη της διαδικασίας όταν βρεθεί σε συγκεκριμένη κατάσταση, να εξαρτάται αποκλειστικά από την παρούσα κατάσταση και όχι από το πως έφτασε σε αυτή.

Η μαθηματική αναπαράσταση της αλυσίδας Markov αντιστοιχεί στην ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $x_1, x_2, x_3 \ldots$ για τα οποία η ιδιότητα Markov που διαθέτουν εκφράζεται από τη σχέση :

$$P(X_{n+1} = x | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x | X_n = x_n)$$

Ακόμη, οι πιθανότητες μετάβασης από τη μία κατάσταση στην άλλη αναπαρίστανται από έναν πίνακα (transition probability matrix) και οι αρχικές πιθανότητες των καταστάσεων, αναφορικά με το ποια από αυτές θα ισχύει την χρονική στιγμή 0, αναπαρίσταται από ένα διάνυσμα.

Για παράδειγμα, για μια αλυσίδα δύο καταστάσεων ο πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων είναι ο εξής:

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{P}_{ij}$ δηλώνει την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j . Παρατηρούμε ότι η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας εμπεριέχεται στις αλυσίδες Markov, καθώς για να μεταβούμε στην κατάσταση j απαιτείται η προηγούμενη παρατήρηση του γεγονότος i.

[1] ορισμένοι συγγραφείς χρησιμοποιούν την ίδια ορολογία και σε περιπτώσεις που ο χρόνος μπορεί να πάρει συνεχείς τιμές

Αντίστοιχα, γραφικά μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα κατευθυνόμενο γράφο (παρόμοιας μορφής με αυτής ενός αυτομάτου πεπερασμένου καταστάσεων), όπου η κάθε ακμή αντιστοιχεί(ως label) στην πιθανότητα μετάβασης από τη μία κατάσταση στην άλλη.

Προσομοίωση καιρό με Αλυσίδες Markov

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι αλυσίδες Markov μπορούν να καθοριστούν πλήρως και να μοντελοποιηθούν εύκολα από τη στιγμή έχει οριστεί επακριβώς ο πίνακας μεταβάσεων των καταστάσεων του και η αρχική του κατάσταση. Σήμερα οι αλυσίδες αυτές εμφανίζονται σε πληθώρα εφαρμογών από το χώρο των επιστημών μέχρι τη μουσική και τα παιχνίδια. Το παρακάτω παράδειγμα εστιάζεται στη μοντελοποίηση της πρόβλεψης του καιρού για την αυριανή μέρα μέσω αλυσίδων Markov τριών καταστάσεων.

Αρχικά ορίζουμε τις τρεις καταστάσεις μας : «Βροχη»(0), «Συννεφιά»(1) και «Ήλιος»(2). Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβάσεων των καταστάσεων και το διάνυσμα πιθανοτήτων αρχικής κατάστασης ως εξής:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{4}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{4}{8} \end{bmatrix}$$

$$p^{\tau} = [\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}]$$

Επομένως η αρχική κατάσταση ορίζουμε να είναι μία απο τις επιτρεπόμενες τρεις με την ίδια πιθανότητα, ενώ οι επόμενες κατάστασεις θα προκύπτουν από τον $\mathbf{P}$ με βάση τη σχέση :

$$p^{\tau}[n] = p^{\tau}[n-1]\mathbf{P}$$

Για την υπολογιστική προσομοίωση χρησιμοποιείται η βοηθητική συνάρτηση PMFdata.m , η οποία αυτό που κάνει είναι με βάση δύο διανύσματα $M \times 1$, το ένα τυχαίων μεταβλητών και το άλλο των αντίστοιχων συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας-PDF (συναρτήσεις μάζας πιθανότητας - PMF) αυτών, καθώς και το επιθυμητό νούμερο πειραμάτων προς προσομοίωση, έστω N, επιστρέφει την έκβαση του καθενός από αυτά σε ένα διάνυσμα $N \times 1$.

Έτσι έχουμε την αντιστοιχία ανάμεσα στις τρεις καταστάσεις του πραγματικού μας προβλήματος και των τριών τιμών που μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητη που αναπαράγεται κάθε φορά από την παραπάνω συνάρτηση. Σε κάθε βήμα η τιμή της παραγόμενης τυχαίας μεταβλητής είναι αυτή που καθορίζει ποια θα είναι η PMF που θα χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη παραγωγή τυχαίας μεταβλητής. Ουσιαστικά δηλαδή, η τιμή που θα επιλέγεται σε κάθε βήμα με τυχαίο τρόπο θα είναι αυτή που θα καταδεικνύει ποια γραμμή του πίνακα $\mathbf{P}$ θα αξιοποίησουμε στο επόμενο πείραμα, αφού σε αυτή θα βρίσκονται οι πιθανότητες να μεταβούμε από την κατάσταση με τιμή αυτήν που μόλις παράχθηκε προς όλες τις υπόλοιπες. Προφανώς προκύπτει πως σε κάθε μας πρόβλεψη καταλήγουμε σε μια καιρική κατάσταση η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από την προηγούμενη καιρική κατάσταση.

Για παράδειγμα του τρόπου επιλογής της PMF κατά συνθήκη που παρουσιάστηκε παραπάνω, έστω ότι η έκβαση ενός πειράματος αποδίδει τιμή 0 στην τυχαία μεταβλητή. Το αποτέλεσμα είναι στο επόμενο πείραμα η PMF να είναι η $\mathbf{P}_{(0+1)j}$ για κάθε j δηλαδή το $[3/8 \quad 2/8 \quad 3/8]^T$, το οποίο εκφράζει πως με δεδομένο ότι σήμερα έχει ήλιο η πιθανότητα αύριο να βρέχει είναι 3/8, να έχει πάλι συννεφιά 2/8 ενώ να έχει ήλιο 3/8(παρατηρούμε σωστά ότι το άθροισμα της γραμμής είναι 1).

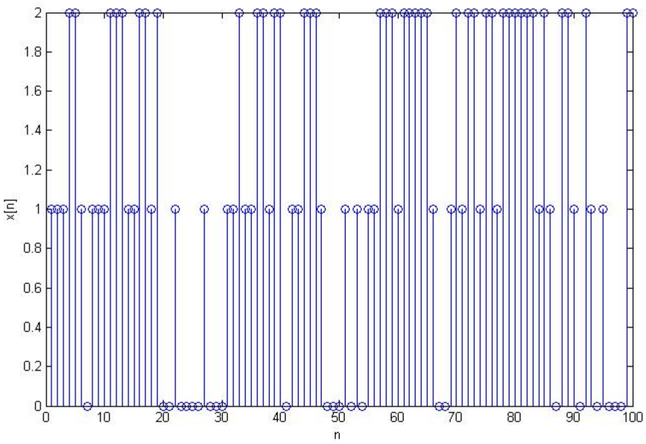
Ο κώδικας σε Matlab που υλοποιεί το παραπάνω είναι ο εξής:

```
%PMFdata.m
function x=PMFdata(N,xi,pX)
M=length(xi);M2=length(pX);
if M~=M2
        message='xi and pX mush have the same dimension'
end
for k=1:M;
    if k==1 bin(k,1)=pX(k);
    else bin(k,1)=bin(k-1,1)+pX(k);
    end
end
u=rand(N,1);
for i=1:N
    if u(i)>0&u(i)<=bin(1) x(i,1)=xi(1);
    end
    for k=2:M
        if u(i)>bin(k-1)&u(i)<=bin(k)
            x(i,1)=xi(k);
        end
    end
end

%weatherMarkov.m
clear all
rand('state',0)
N=1000;
```

```
p0=[1/3 1/3 1/3]';
P=[4/8 3/8 1/8;3/8 2/8 3/8;1/8 3/8 4/8];
xi=[0 1 2]';
X0=PMFdata(1,xi,p0);
i=X0+1;
X(1,1)=PMFdata(1,xi,P(i,:));
i=X(1,1)+1;
for n=2:N
        i=X(n-1,1)+1;
        X(n,1)=PMFdata(1,xi,P(i,:));
end
```

Το αποτέλεσμα της παραπάνω υλοποίησης για τις εκατό πρώτες μέρες φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου μπορεί κανείς να παρατηρήσει την αλληλουχία μεταξύ καιρικών συνθηκών και τη συχνότητα εμφάνισης του καθενός.



Ο ντετερμινισμός συναντά την τυχαιότητα

Σύμφωνα με τα παραπάνω, γίνεται φανερό ότι μια αλυσίδα Markov παρέχει ένα μαθηματικό εργαλείο για τη μοντελοποίση προβλημάτων απόφασης και επιλογής από καταστάσεις, όπου τα αποτελέσματα είναι εν μέρει τυχαία και εν μέρει κατασκευασμένα σύμφωνα με κανόνες που ορίζονται εξ αρχής. Πηγαίνοντας πιο πέρα, το επόμενο παράδειγμα έρχεται από το χώρο της φράκταλ γεωμετρίας, η οποία σε αντιδιαστολή με την ευκλείδια μπορεί να προσομοιώσει με μεγαλύτερη επιτυχία το φυσικό κόσμο για τον εξής λόγο: έχει την ιδιότητα να συνδυάζει το φαινομενικά τυχαίο και χαοτικό με την τάξη. Η κατασκευή του επόμενου φράκταλ, γνωστού και ως Sierpinski , πραγματοποιείται με τη χρήση αλυσίδας Markov 101^2 καταστάσεων και η διαδικασία κατασκευής του συνοψίζεται στα εξής βήματα:

1. Επιλέγεται τυχαία ένα σημείο στο δισδιάστατο χώρο, έστω $X = [10 \quad 80]^T$.
2. Επιλέγεται τυχαία ένα από τα 3 σημεία αναφοράς που ορίζουμε, έστω $(0, 0), (100, 0), (50, 100)$(τα τρία διανύσματα των σημείων αντιστοιχούν στον πίνακα μεταβάσεων των καταστάσεων σύμφωνα με την αναφερόμενη μέχρι στιγμής ορολογία).
3. Υπολογίζουμε το σημείο που βρίσκεται στη μέση ανάμεσα στο αρχικό μας σημείο και στο σημείο που μόλις επιλέξαμε και το στρογγυλοποιούμε στις ακέραιες συντεταγμένες του κοντινότερου σημείο(αυτό το νούμερο θεωρείται η κατάσταση στην οποία έχουμε μεταβεί σύμφωνα με την αναφερομένη μέχρι στιγμής ορολογία).
4. Ανανέωνουμε το αρχικό σημείο με αυτό που μόλις υπολογίσαμε και επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Η φόρμουλα που αντιστοιχεί στην παρακάτω κατασκευή είναι η εξής:

$$X[n] = [\frac{1}{2}(X[n-1] + R[n])_{round},$$

όπου n οι καταστάσεις και $R[n] = [r_1[n] \quad r_2[n]]^T$.

Η ιδιότητα Markov ικανοποείται καθώς για την παραγωγή της εκάστοτε κατάστασης χρησιμοποιείται αποκλειστικά η προηγούμενη χωρίς την απαίτηση επιπλεον μνήμης.

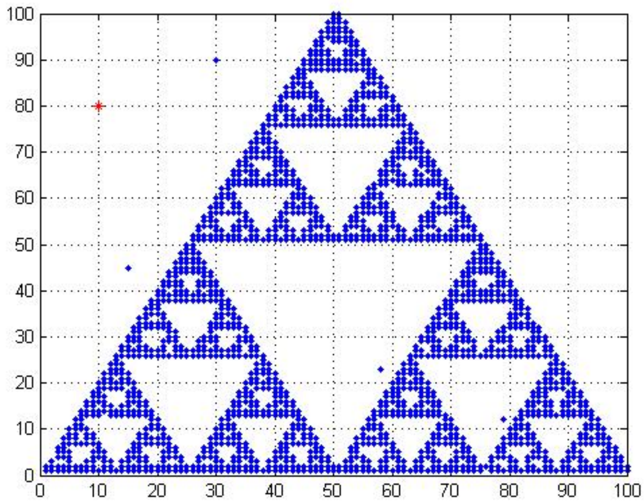
Η παρακάτω εικόνα αναπαριστά γραφικά τον τρόπο που θα εξελιχτεί η κατασκευή με βασή τα βήματα που περιγράφηκαν και πως το κάθε τρίγωνο θα χωρίζεται διαδοχικά σε επιμέρους τρίγωνα για να καταλήξει τελικά στο τρίγωνο Sierpinski .

Ο κώδικας που υλοποιεί την παραπάνω διαδικασία σε Matlab είναι ο εξής:

```
% sierpinski.m
clear all;clf;
```

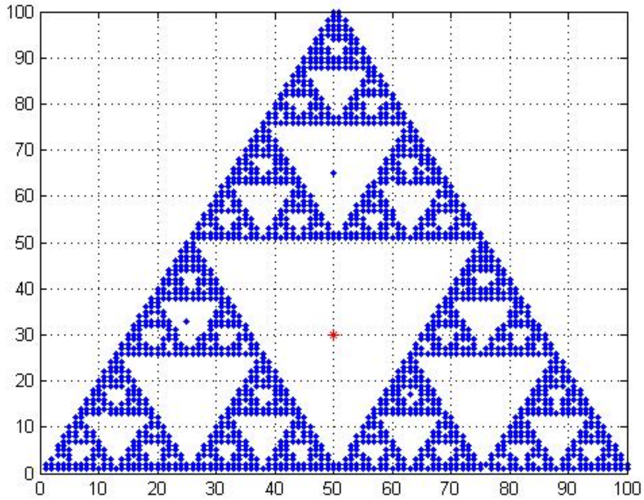
```
rand('state',0)
r(:,1)=[0 0]';
r(:,2)=[100 0]';
r(:,3)=[50 100]';
x0=[10 80]';
%x0=[50 30]';
plot(x0(1),x0(2),'*')
axis([0 100 0 100])
hold on
xn_1=x0;
for n=1:10000
    j=floor(3*rand(1,1)+1);
    xn=round(0.5*(r(:,j)+xn_1+3));
    plot(xn(1),xn(2),'.','Color','red')
    xn_1=xn;
end
grid
hold off
```

Το αποτέλεσμα για $n = 10000$ (για μεγαλύτερο n το σχήμα που δημιουργείται είναι το ίδιο με μεγαλύτερη πυκνότητα των σημείων που το δημιουργούν) παρουσιάζεται στο σχήμα:



Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται μοτίβα,συγκεκριμένα τρίγωνα, που επαναλαμβάνονται και μάλιστα εμπεριέχονται το ένα στο άλλο. Οι τριγωνικές κενές περιοχές είναι τα σημεία στα οποία η αλυσίδα αποκτά σταθερή κατάσταση(steady state)και η σταθερής κατάστασης PMF της είναι μηδενική σε αρκετές τριγωνικές περιοχές. Η τυχαιότητα που εμπερίεχεται στην κατασκευή είναι ορατή μόνο σε κάποια ελάχιστα , σε σχέση με τα συνολικά, αρχικά σημεία, τα οποία παρουσιάζονται διάσπαρτα στο δισδιαστατο χώρο χωρίς κάποια δομή έως ότου ο έλεγχος σταθεροποιηθεί.

Καίριο σημείο στη μελέτη του συγκεκριμένου σχήματος (ζητούμενο άσκησης 22.30) αποτελεί το γεγονός ότι η επιλογή οποιουδήποτε άλλου αυθαίρετου αρχικού σημείου οδηγεί στην αναπαραγωγή του ακριβώς ίδιου σχήματος. Η επιλογή για παράδειγμα του σημείου $x = [50 \quad 30]^T$ μας δίνει σαν αποτέλεσμα την παρακάτω εικόνα, αμφισβητώντας με αυτόν τον τρόπο το κατά πόσο η τυχαιότητα που χρησιμοποιείται επηρεάζει την κατασκευή της αλυσίδας, καθώς φαίνεται ότι αυτή είναι ανεξάρτητη από το αρχικό σημείο και τη σειρά των τυχαίων μας επιλογών.



Εύλογα προκύπτει η απορία αν οι αλυσίδες Markov είναι τελικά ένα ντετερμινιστικό ή τυχαίο εργαλείο. Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση δεν είναι γνωστή, όμως η ιδιότητα που τις καθιστά ικανές να αποθηκεύουν πολύπλοκες φιγούρες κάνοντας χρήση μόνο ενός απλού αλγορίθμου συμβάλλει στη χρησιμότητα αυτών στη συμπίεση δεδομένων.

Συγκεκριμένα με βάση τον επαναληπτικό αλγόριθμο που περιγράφηκε και βασίζεται στη θεωρία χαοτικών δυναμικών συστημάτων έχει υλοποιηθεί αλγόριθμος συμπίεσης που επιτυγχάνει λόγο συμπίεσης 10.000 προς 1. Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερη χρήσιμη για περίπλοκες δομές που συναντώνται στη φύση, όπως φτερά, φύλλα,σύννεφα κλπ. και δεν θα μπορούσαν να ανακατασκευαστούν με απλά γεωμετρικά σχήματα με αποδοτικό τρόπο για ένα υπολογιστικό σύστημα.

Βιβλιογραφία

1 Steven M. Kay,“Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB” (2006)

2 Athanasios Papoulis, S. unnikrishna Pillai, “Probability, Random Variables and Stochastic Processes”,4th edition (2002)

3 Michael F. Barnsley, Alan D. Sloan(1988),“A better way to compress images”, Journal BYTE Volume 13 Issue 1,p.215-223